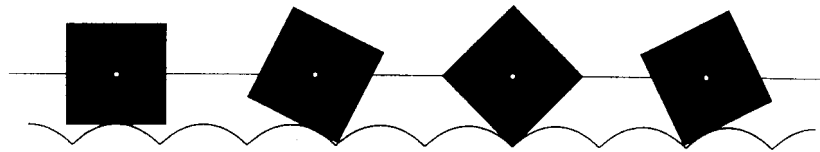


Fährt ein Fahrzeug mit quadratischen Rädern auf der geeigneten Strasse tatsächlich ruhig?



In einem anderen "Papier" habe ich die Herleitung der Gleichung¹ einer geeigneten Strasse aufgeschrieben. Die Form der Strasse wurde so gewählt, dass sich bei einer "Fahrt" der Mittelpunkt (und damit die Radachse) des quadratischen Rades stets auf gleicher konstanter Höhe befindet.

Bei geeignet gewähltem Koordinatensystem hat der erste Bogen der Strasse die

Gleichung
$$y = a \cdot \left[\sqrt{2} - \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \right]$$

Durch die so berechnete Strassenform wurde erreicht, dass scheinbar ein rüttelfreies Fahren möglich ist. Dies wird übrigens auch in verschiedenen mathematisch-technischen Museen so dargestellt und propagiert.

In diesem Artikel zeige ich, dass das betreffende Fahrzeug trotz der idealen Strassenoberflächenform durchgeschüttelt wird, falls es mit einem "normalen" Motor ausgestattet ist.

Mit anderen Worten:

Wird die Radachse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit bewegt, so werden die Fahrgäste in *horizontaler* Richtung durchgeschüttelt.

Bei genauem Hinsehen und Überlegen wird diese Vermutung intuitiv ersichtlich. Dennoch ist es interessant, die Angelegenheit mathematisch exakt zu untersuchen.

Ich gehe folgendermassen vor:

1. Rekapitulation der benötigten Gleichungen aus der Herleitung der Strasse
2. Die Radachse befindet sich immer exakt vertikal oberhalb des Berührungspunktes des quadratischen Rades mit der gekrümmten Strassenoberfläche
3. Zurückgelegte Wegstrecke x als Funktion des verwendeten Drehwinkels φ des Rades
4. $x = x(\varphi)$ ist keine lineare Funktion. Folglich ist die Fahrzeuggeschwindigkeit bei konstanter Drehgeschwindigkeit der Räder *ungleichförmig*

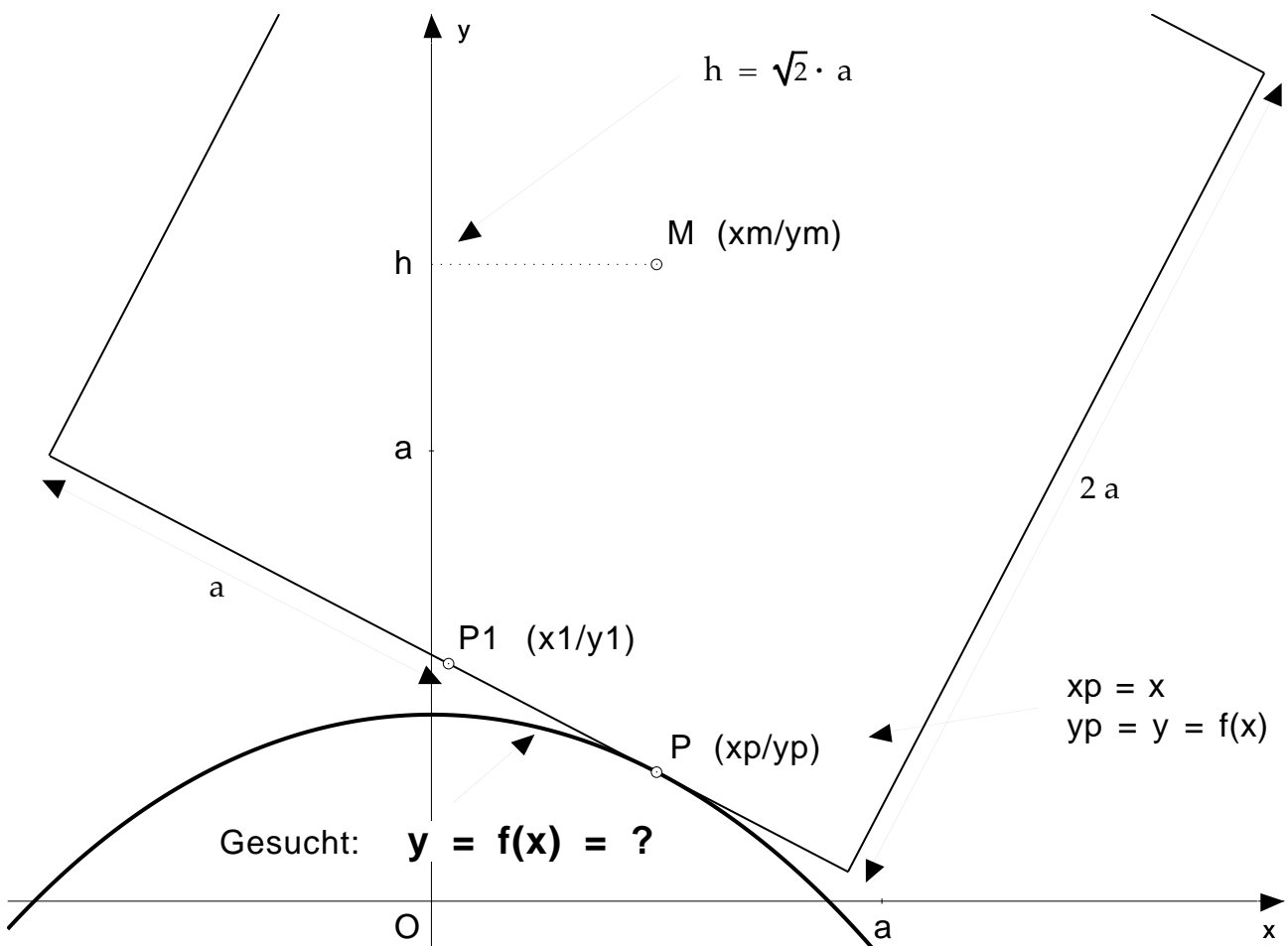
¹ Zu finden auf <http://www.kst.ch/mathematik/quadrad.html>
nämlich <http://www.kst.ch/mathematik/mathstuff/quadradRad2005.pdf>

1. Rekapitulation der benötigten Gleichungen aus der Herleitung der Strasse

Bezeichnungen:

- $P = P(x_p / y_p)$ = Berührungspunkt des Rades mit der Strasse
- $P_1 = P_1(x_1 / y_1)$ = Mittelpunkt der entsprechenden Quadratseite des Rades
- $M = M(x_m / y_m)$ = Mittelpunkt des quadratischen Rades
- $2 \cdot a$ = Seitenlänge des Quadrates

Geometrie:



Daraus ergeben sich die auf der nächsten Seite aufgeführten Gleichungen ...

Für genaueres Verständnis der folgenden Formeln verweise ich auf meine Arbeit², in welcher ich alles ausführlich hergeleitet hatte.

(1.1) Die Strecke P_1P ist gleich lang wie der Strassenbogen vom Hochpunkt bis P. Sie

hat deshalb die Länge $\overline{P_1P} = s = \int_0^{x_P} \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt$

Anmerkung:

Als Integrationsvariable habe ich deshalb t gewählt, weil x die obere Integrationsgrenze ist.

(1.2) Der Vektor \vec{PP}_1 ist parallel zur Kurventangente.

Er hat die gleiche Richtung und Orientierung wie $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -y' \end{pmatrix}$, wobei $y' = f'(x)$ ist.

Folglich ist $\vec{PP}_1 = \frac{-s}{\sqrt{1 + [y']^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y' \end{pmatrix}$

(1.3) Der Vektor $\vec{P_1M}$ hat die Länge a und steht rechtwinklig zu \vec{PP}_1 :

$\vec{P_1M} = \frac{a}{\sqrt{1 + [y']^2}} \cdot \begin{pmatrix} -y' \\ 1 \end{pmatrix}$

(1.4) Für den Mittelpunkt M ergibt sich wegen $\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{PP}_1 + \vec{P_1M}$ die

Gleichung $\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{-s}{\sqrt{1 + [y']^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y' \end{pmatrix} + \frac{a}{\sqrt{1 + [y']^2}} \cdot \begin{pmatrix} -y' \\ 1 \end{pmatrix}$

(1.5) Der erste Bogen der Strasse hat bei obiger Wahl des Koordinatensystems die

Gleichung $y = f(x) = a \cdot [\sqrt{2} - \cosh(\frac{x}{a})]$

² <http://www.kst.ch/mathematik/mathstuff/quadratRad2005.pdf>
auf <http://www.kst.ch/mathematik/quadrat.html>

2. Die Radachse befindet sich immer exakt vertikal oberhalb des Berührungspunktes P des quadratischen Rades mit der gekrümmten Strassenoberfläche

Idee:

Wir berechnen die x-Komponente Δx des Vektors $\vec{PM} = \vec{PP}_1 + P_1\vec{M} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$ und müssen $\Delta x = 0$ erhalten (vgl. Figur auf Seite 2).

(2.1) Nach (1.2) und (1.3) ist $\Delta x = \frac{-s}{\sqrt{1 + [y']^2}} + \frac{-a \cdot y'}{\sqrt{1 + [y']^2}}$ oder vereinfacht ...

(2.2) $\Delta x = \frac{-s - a \cdot y'}{\sqrt{1 + [y']^2}}$

Vorbereitungen zu den hyperbolischen Funktionen:

(1.5) $y = f(x) = a \cdot [\sqrt{2} - \cosh(\frac{x}{a})]$

(2.3) $y' = -a \cdot \frac{1}{a} \cdot \sinh(\frac{x}{a}) \rightarrow [y']^2 = \sinh^2(\frac{x}{a})$

(2.4) $1 + [y']^2 = 1 + \sinh^2(\frac{x}{a}) = \cosh^2(\frac{x}{a})$

Berechnung des Zählers von Δx (vgl. (2.2)):

(2.5) Wir setzen (1.1) und (1.5) ein und erhalten mit (2.4) (für $x = xp$)

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt = \int_0^x \sqrt{1 + [y']^2} dt = \int_0^x \cosh(\frac{t}{a}) dt = a \cdot \sinh(\frac{x}{a})$$

(2.6) Wegen (2.3) ist $a \cdot y' = -a \cdot \sinh(\frac{x}{a})$

(2.7) Aus (2.5) und (2.6) ergibt sich nach (2.2) für den Zähler von Δx :

$$-s - a \cdot y' = -a \cdot \sinh(\frac{x}{a}) + a \cdot \sinh(\frac{x}{a}) = 0$$

Damit ist gezeigt, dass $\Delta x = 0$ ist.

Dies bedeutet, dass sich der Radmittelpunkt M immer exakt vertikal oberhalb des Berührungspunktes P des Rades mit der Strasse liegt.

Nochmals mit anderen Worten:

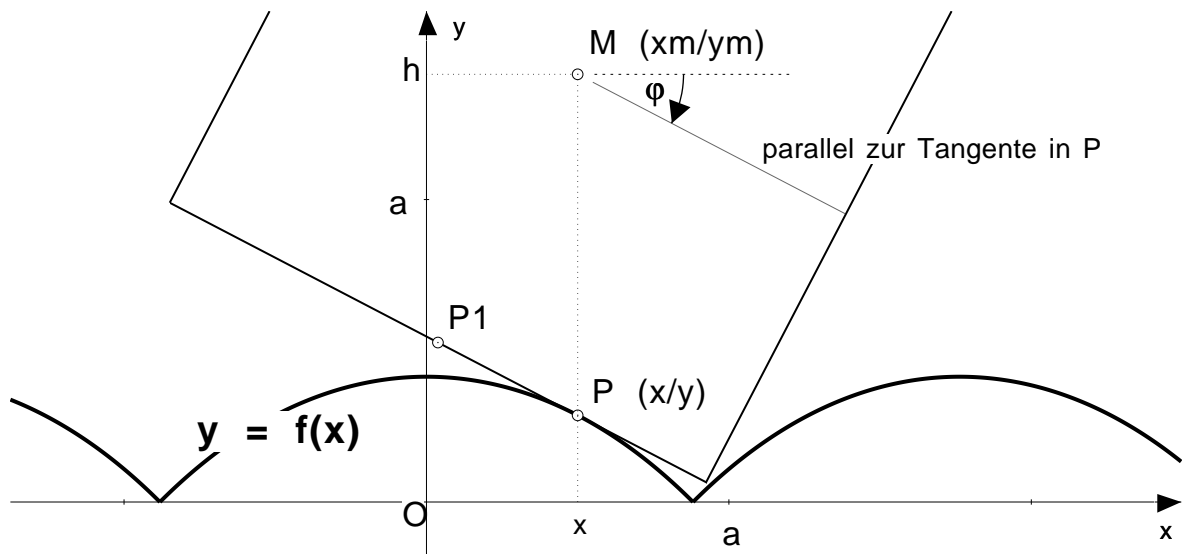
(2.8) Die Punkte M und P haben immer die gleiche x-Koordinate!

Dies wird verwendet bei der nachfolgenden Figur und den zugehörigen Überlegungen.

3. Zurückgelegte Wegstrecke $x = x(\varphi)$ als Funktion des verwendeten Drehwinkels φ des Rades

Das Fahrzeug bewegt sich für unsere Rechnung nach rechts (in positiver x -Richtung). Bis zur unten dargestellten Situation hat sich das Rad um den negativ (!) orientierten Winkel φ gedreht.

(3.1) Wir zeichnen durch die Radachse M eine Parallele zur x -Achse und das Lot auf die "rechte" Quadratseite. Wir erkennen, dass der Drehwinkel φ durch diese beiden Schenkel dargestellt wird:



(3.2) Das Lot von M auf die rechte Quadratseite ist parallel zur "unteren" Quadratseite. Damit ist dieses Lot auch parallel zur Tangente an die Strasse im Berührungspunkt P mit den Koordinaten $P(x / f(x))$. Deshalb hat die Tangente in P den Neigungswinkel φ gegenüber der x -Achse.

(3.3) Der Tangens des Neigungswinkels einer Geraden ist die Steigung dieser Geraden. In unserem Fall ergibt sich

$$\begin{aligned} \tan(\varphi) &= y' = f'(x) && \text{[(1.5) einsetzen]} \\ &= a \cdot \frac{d}{dx} \left[\sqrt{2} - \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \right] = a \cdot \left[-\frac{1}{a} \cdot \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \right] = -\sinh\left(\frac{x}{a}\right) \end{aligned}$$

(3.4) Wir lösen die Gleichung (3.3) nach x auf und erhalten die gewünschte Beziehung:

$$\sinh\left(\frac{x}{a}\right) = -\tan(\varphi) = \tan(-\varphi) \quad \text{[weil der Tangens eine ungerade Funktion ist]}$$

(3.5) → $x = x(\varphi) = a \cdot \operatorname{arsinh}(\tan(-\varphi))$

Diese Gleichung beschreibt wegen (2.8) die x -Koordinate der Radachse M in Abhängigkeit vom Drehwinkel φ .

Dabei gilt zu beachten, dass dies nur für den ersten Strassenbogen gilt: Für $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ Für andere Winkelbereiche von φ muss Gleichung (3.5) entsprechend periodisch wiederholt werden.

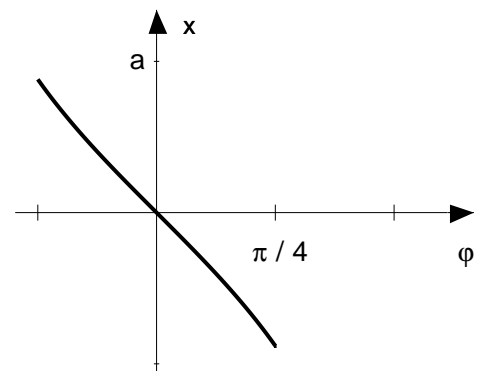
4. Die Fahrzeuggeschwindigkeit bei konstanter Drehgeschwindigkeit der Räder ist *ungleichförmig*

Mit Gleichung (3.5) wurde offensichtlich: $x = x(\varphi)$ ist keine lineare Funktion. Dies bedeutet, dass die Grössen x und φ *nicht* proportional zueinander sind. Dreht sich also das Rad mit konstanter Winkelgeschwindigkeit, so ändert sich die Fahrzeuggeschwindigkeit ununterbrochen.

Vom Mathematischen her ist damit die Angelegenheit abgehandelt.

Es ist dennoch interessant, die Zusammenhänge zu illustrieren:

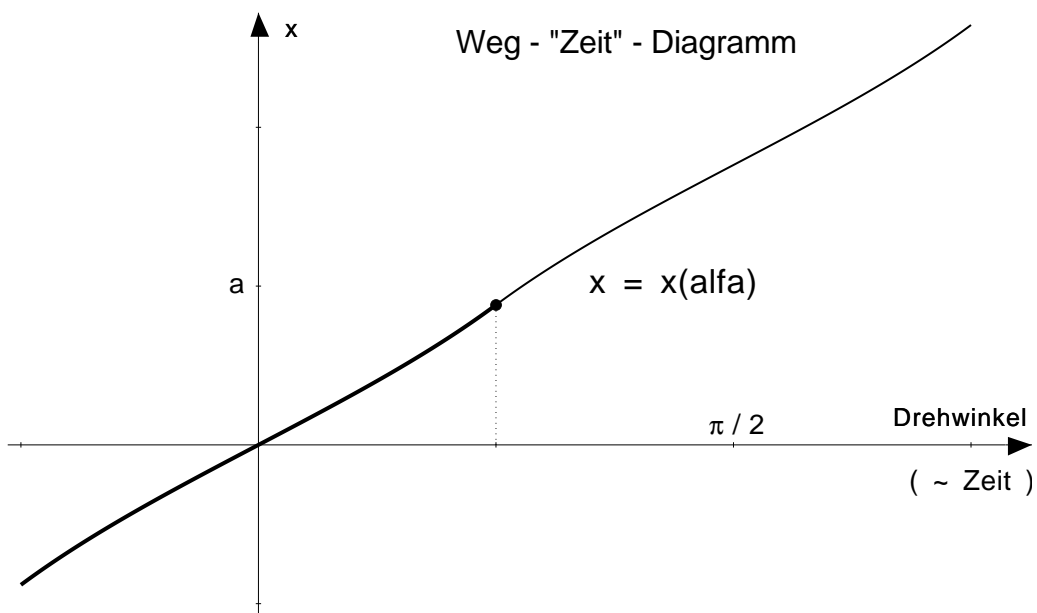
- (4.1) Zeichnen wir den Graphen der Funktion $\varphi \rightarrow x$ für den ersten Strassenbogen, so erhalten wir *nicht*, was wir intuitiv gewünscht hätten. Bei (3.1) hatten wir erkannt, dass der Drehwinkel φ negativ orientiert ist. Aus diesem Grund müssten wir nebenstehenden Graphen in negativer φ -Richtung betrachten (d.h. nach links). Dies ist aber nicht "kundenfreundlich". Ein normaler Mensch denkt mit dem Betrag des Drehwinkels.



Aus diesem Grund wird in allen nachfolgenden Grafiken nach rechts der Winkel $-\varphi =: \alpha$ abgetragen und mit "**Drehwinkel α** " angeschrieben. Die entsprechende Gleichung ist

$$(3.5') \quad x = x(\alpha) = a \cdot \operatorname{arsinh}(\tan(\alpha))$$

Für den ersten und zweiten Strassenbogen nach rechts ergibt sich damit die Grafik:



Das Schütteln scheint also doch nicht so schlimm zu sein.

Berechnung der Geschwindigkeit:

(4.2) Die Horizontalgeschwindigkeit des Fahrzeugs ist $\dot{x}(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} x(\alpha)$

Vorbereitungen:

(4.3) $\frac{d}{dt} \operatorname{arsinh}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ [Formelsammlung]

(4.4) $\frac{d}{d\alpha} \tan(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$ [Formelsammlung]

(4.4) Unter Verwendung der Kettenregel ergibt sich mit (4.3) und (4.4) aus (3.5')

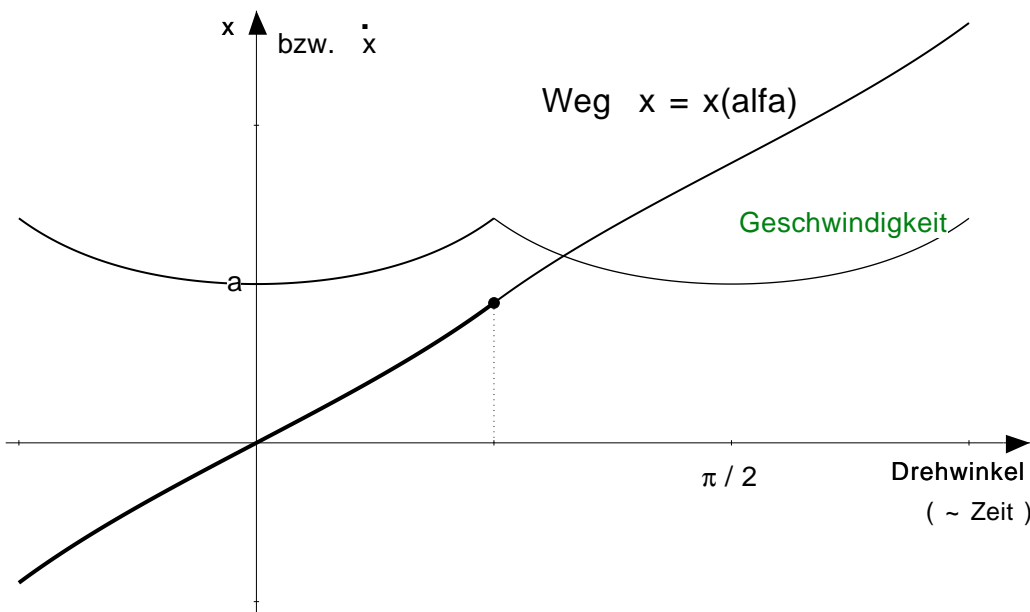
$$\dot{x}(\alpha) = a \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}} \cdot (1 + \tan^2(\alpha)) = a \cdot \sqrt{1 + \tan^2(\alpha)} = \frac{a}{|\cos(\alpha)|}$$

Auch hier ist wieder der eingeschränkte Definitionsbereich für den Drehwinkel α zu beachten. Die angegebene Geschwindigkeit ist so nur korrekt für den ersten Strassenbogen!

(4.5) Geschwindigkeit im ersten Strassenbogen = $\dot{x}(\varphi) = \frac{a}{|\cos(\varphi)|}$

- Geschwindigkeit im Hochpunkt = $\dot{x}(0) = a$
- Geschwindigkeit in der "Spitze" = $\dot{x}\left(\frac{\pi}{4}\right) = a \cdot \sqrt{2}$.

Das ist rund 41% schneller als im Hochpunkt der Strasse.



Wie intuitiv erwartet macht die Beschleunigung dort einen Sprung, wo die Strassenoberfläche in eine Spitze geht.