

Vom Sinn des Mathematikunterrichts

Peter Gallin

Die Mathematik genießt eine hohe Wertschätzung in unserer Gesellschaft. Vielen ist bekannt, dass das Rechnen im Alltag und im Bankwesen dank mathematischer Formalisierungen effizient abgewickelt werden kann, dass die Ingenieurwissenschaften ohne Mathematik nicht auskommen und dass die Computer, die eng mit Mathematik verbunden sind, die Raumfahrt erst ermöglicht haben. Der Siegeszug des Computers in allen Lebensbereichen ist der greifbare Beweis dafür, dass die Mathematik eine Schlüsselstellung für alle technischen Errungenschaften und für jeden naturwissenschaftlichen Fortschritt innehat. Wer wollte angesichts dieser Tatsachen die starke Stellung der Mathematik im Kanon der Schulfächer in Zweifel ziehen? Da hat es der Lateinunterricht an unseren Gymnasien schon schwerer, sich zu rechtfertigen. Er muss sich auf tiefer liegende Bildungswerte berufen, denn der direkte Nutzen des Lateins im Alltag ist nicht mit Händen zu greifen. Vielleicht blickt das Latein sogar mit Neid auf die Mathematik, deren Stand so fest und so einfach zu begründen ist.

Schauen wir uns die Schule aber etwas näher an, ziehen Wolken am strahlenden Himmel der Mathematik auf. Was hat denn die Mathematik, die nach der Primarschule unterrichtet wird, mit dem Leben der Jugendlichen zu tun? Wer braucht denn nur schon den Dreisatz, der am Schluss der Primarschulzeit vermittelt wird? Mitten in der Schulzeit kümmert es die Lernenden wenig, dass die Mathematik in Technik und Wissenschaft intensiv genutzt wird. Sie möchten wissen, wozu sie hier und jetzt gut ist. „Wozu müssen wir das lernen?“ ist die gefürchtete Schülerfrage. Angesichts der starken Stellung seiner Wissenschaft ist es begreiflich, dass ein erfolgsgewohnter Mathematiker mit Hinweisen auf die Zukunft antwortet: „Warte nur bis du einmal gross bist, dann wirst du erkennen, wie wichtig die Mathematik für die Menschheit ist.“ Oder in einer anderen Variante: „Lerne zuerst einmal die Grundtechniken, dann wirst du später die Schönheiten der Mathematik verstehen und geniessen können.“ Erstaunlicherweise werden diese vertröstenden Zukunftsargumente häufig akzeptiert und verinnerlicht. Damit wird ein Argumentationsmuster zementiert, das die Lernenden, wenn sie selbst einmal erwachsen sind, ihrerseits repetieren und so von Generation zu Generation weitergeben. Um aber der Frage nach dem Sinn des Mathematikunterrichts auf den Grund zu gehen, wäre es manchmal besser, wenn diese Verweise auf eine sich erfüllende Prophezeiung von den Lernenden zurückgewiesen und unter Protest andere, auf die Gegenwart bezogene Antworten eingefordert würden. Das würde die Mathematiklehrerinnen und -lehrer zwingen, nach anderen, besseren Argumenten Ausschau zu halten, Argumente, die das Lernen von Mathematik im Hier und Jetzt erleichtern könnten.

Als junger Gymnasiast habe ich einmal auf dem Schulweg älteren Mitschülern gegenüber die Vermutung geäußert, im Latein würde man schon denken lernen, weil die Wörter, die zusammengehörten, so weit im Text verstreut seien. „Nein, nein“, war deren überzeugte Meinung, „logisch denken lernt man in der hohen Schule der Mathematik.“ Ich höre heute noch den dezidierten und zugleich würdevollen Tonfall, mit dem die damals vielleicht 17-Jährigen mir diesen Lehrsatz vermittelten. Vielleicht wurde hier eine Weiche in meiner Berufswahl gestellt, denn im Verlauf der weiteren Gymnasialzeit fühlte ich mich tatsächlich mehr und mehr von der „Schule des Denkens“ in der Mathematik angezogen. Aber nicht vielen erging und ergeht es so. Jetzt, nachdem ich Mathematik-lehrer geworden bin, stelle ich fest, dass auch dieses Argument nicht unbedingt verfangt, denn auch ihm haftet eine Zukunftsorientierung an: "Du wirst logisch denken lernen, wenn du dich mit Mathematik beschäftigst." Obwohl das Argument besser auf das Wesen der Mathematik passt als nur der Hinweis auf die Nützlichkeit der Mathematik für die Menschheit, kann es missbraucht werden, um scheinbare Sinnlosigkeit in der Gegenwart mit einem versprochenen Paradies in ferner Zukunft zu entschuldigen.

Ausserdem kann natürlich jedes Schulfach von sich beanspruchen, eine „Schule des Denkens“ zu sein.

Wir stehen also vor der zentralen Frage: Wie wird Sinn in der Gegenwart produziert? Schauen wir uns doch einmal ausserhalb der Schule um. Wann finden wir, dass etwas sinnvoll ist? Niemand wird wohl behaupten, dass eine Bergwanderung zum Beispiel keinen Sinn habe. Und doch, nüchtern betrachtet, bringt eine Bergwanderung kaum weiter: Am Schluss ist man ja meist wieder am Ausgangspunkt und hätte doch ebenso gut gleich dort bleiben können. Weshalb unterzieht man sich denn freiwillig einiger Mühen und Strapazen und setzt sich manchmal sogar lebensbedrohenden Gefahren aus? Es scheint die Befriedigung zu sein, die man nach überstandener Anstrengung erlebt, wenn man zurück schaut auf das durchwanderte Gebiet, oder wenn man vom Aussichtspunkt aus eine wunderbare Fernsicht hat, oder wenn man spürt, wie die eigenen Glieder ermüdet sind, oder wenn man im Kreis der Gefährten von Erlebnissen erzählen kann. Genuss und Befriedigung sind sinnstiftend, aber wohl nur dann, wenn davor eine Anstrengung liegt. Dabei ist entscheidend, dass die Anstrengung absehbar, erträglich und vor allem freiwillig gewählt ist. Wird aber das Genussvolle verabreicht, ohne dass eine Eigenleistung vorangeht, bleibt – vor allem, wenn das immer wieder passiert – ein schaler Nachgeschmack übrig. Ein Mensch sucht sich offenbar genau dasjenige Mass von Anstrengung aus, das zu erbringen er fähig ist. Das zeichnet seine Vitalität aus. Das hinterlässt Befriedigung.

Das Bild von der Bergwanderung passt recht gut auf die Mathematik, weil Mathematik-Treiben von der Sache her zuerst einmal eine ganz private Angelegenheit ist, so privat, wie die Leistung des Aufstiegs auf der Bergwanderung, die jede teilnehmende Person höchst persönlich erbringen muss. Niemand wird – in der Regel – auf einer Sänfte hoch getragen. Dass es auch genussvoll sein kann, zur Abwechslung einmal mit einer Bergbahn hochzufahren, sei keineswegs verschwiegen. Besonders, wenn die Klippen allzu steil sind, mag das durchaus sinnvoll sein. Nun sind aber die Berge der Mathematik im Bereich der Schulmathematik in der Regel nicht unbezwingbar. Das meiste kann bei mittlerer Kondition aus eigener Kraft bewältigt werden. Gerade im Gegensatz zu anderen Schulfächern wird in der Mathematik sehr wenig Weltwissen und Lebenserfahrung vorausgesetzt. Mathematische Zusammenhänge können tatsächlich allein mit Bleistift und Papier erforscht und erfunden werden. Es braucht keine Literatur, keine Experimente und keine Experten, um mathematisch tätig werden zu können. Es reicht, wenn man zählen kann. Das ist so elementar wie das Singen und das Gehen. Darum gibt es in der Mathematik und in der Musik die jüngsten Wunderkinder. Natürlich hat sich die Mathematik – wie auch die Musik – zu einer hohen Wissenschaft entwickelt, in der es viel zu lernen gibt, und die schliesslich nur noch für Leute mit Spitzenkondition zu erklimmen ist. Das Charakteristische an ihr ist aber trotzdem, dass sie mit den geringsten Voraussetzungen auskommt, die ausserhalb des Wissenschaft treibenden Individuums liegen. Diese spezielle Eigenart der Mathematik kann nun pädagogisch nutzbar gemacht werden, damit die Schülerinnen und Schüler den Mathematikunterricht nicht nur als nützlich für die Zukunft, sondern auch als sinnvoll im Hier und Jetzt erleben können.

Eine Englischlehrerin gestand mir kürzlich: „Sinn machte der Mathematikunterricht immer dann, wenn ich das Gefühl hatte, etwas zu durchschauen und etwas zu können.“ Man muss den Lernenden also die Gelegenheit geben, aufgrund individueller und angemessener Anstrengung einen Durchblick und ein Können zu erlangen, das sie als befriedigend erleben können. Die Lernenden sollen spüren, wie sie sich aus eigener Kraft von einer verwirlichen, chaotischen Situation zu einer klärenden Struktur, einem eindrücklichen Muster emporarbeiten können. Kein Fach offeriert ein derart elementares Tätigkeitsfeld zum Erfahren und Trainieren der eigenen Kräfte wie die Mathematik. Descartes „cogito, ergo sum“ erfährt eine pädagogische Färbung und Umdeutung zu „ich treibe Mathematik, also spüre ich mich selbst“. Das hat weit reichende Konsequenzen auf die Gestaltung des Unterrichts.

Als junger Mathematiklehrer habe ich diverse Stufen der Vermittlung von Mathematik erprobt. Zuerst glaubte ich, ich müsste alles nur gut erklären, damit es die Lernenden verstehen. Das ist auch recht gut gelungen, aber alles war so schnell wieder vergessen, dass bereits zu Hause nicht mehr klar war, was in der Stunde erklärt worden ist. Dann glaubte ich, dass mit den Themen der Mathematik mehr Lebensbezug, also eine Verbindung zur realen Welt hergestellt werden müsste. Dies hatte vielfach den Effekt, dass die Problemstellungen rapid schwierig wurden und die Lernenden bald überforderten. Ausserdem bestand dabei die Gefahr, dass ich den obligatorischen Lehrplanstoff nicht mehr in der vorgesehenen Zeit behandeln konnte. Schliesslich bin ich zu reinen Fragestellungen der Mathematik, zu den ganz elementaren, im Lehrplan vorgesehenen Stoffen, zurückgekehrt und stelle sie zuerst einmal ins Zentrum. Im Unterschied zu früher lasse ich aber den Schülerinnen und Schülern beim Erkunden den Vortritt. Das bedeutet, dass ich nicht mehr so viel erkläre wie früher, sondern die Lernenden mit geeigneten Aufträgen und Lernaufgaben dazu auffordere, möglichst auf eigenen Wegen sich das neue Stoffgebiet zurechtzulegen und dabei über ihre Probleme, Erfolge, Misserfolge und Schwierigkeiten schriftlich Protokoll zu führen. So wird die Arbeit der Lernenden im Mathematikunterricht nicht unbedingt bequemer und einfacher, denn es gibt immer wieder Durststrecken auszuhalten. Im schlimmsten Fall aber kann ich immer helfend eingreifen. Ich stürme einfach nicht mehr mit wehenden Fahnen und dem Motto "mir nach!" voran, sondern sage "geh du voran!" Wer kennt nicht das Problem der Orientierung in einer fremden Stadt. Hat man einen Führer, der einem lückenlos den Weg weist, wird man den gleichen Weg am nächsten Tag nur noch mit Schwierigkeiten finden. Hatte man dagegen einen Stadtplan, mit dem man in eigener Regie den Weg zusammenstellte, wird man sich am nächsten Tag problemlos an ihn erinnern und vielleicht sogar Verbesserungen anbringen.

Der Lohn für die Erkundungsarbeit ist für die Lernenden der Genuss, sich dem Ziel aus eigener Kraft genähert oder es sogar erreicht zu haben. Dann gibt es viel zu erzählen und die Erlebnisse bleiben lange haften. Auch jene, die das Ziel nicht ganz erreichten und schliesslich auf meine Hilfe angewiesen waren, haben das Problem aus nächster Nähe kennengelernt und sind in der Regel dankbar für meine Antworten auf ihre Fragen. Das erleben oft sogar bestandene Mathematiker, wenn sie an die eigenen Grenzen stossen und sich Hilfe bei Kollegen und in Büchern holen müssen. In diesem Sinn wird also die Beschäftigung mit Mathematik zu einem Ort der Selbsterfahrung. Man lernt seine Stärken und Schwächen genau kennen, ohne in psychologisierende Bereiche zu geraten. Man muss ja nicht gleich an Aischylos denken, der die berühmte Formel „Durch Leiden lernen“ geprägt hat. Der Lernende kann nämlich das Mass der Anstrengung selbst bestimmen und darf auch manchmal die Bergbahnen benützen, die auf alle Gipfel der Schulmathematik gebaut worden sind.

Es zeigt sich, dass sich mein Mathematikunterricht über die Jahre hinweg angereichert hat: Neben die genaue Analyse und Dosierung der Schulstoffe, neben das einfühlsame, geduldige und variantenreiche Erklären, neben den Einbezug von Alltagssituationen, in denen Mathematik gebraucht werden kann, trat die Überzeugung, dass – wenn immer möglich – der Lernende produktiv tätig sein muss, damit seine von ihm selbst dosierten Anstrengungen mit Befriedigung belohnt werden und seine Erkenntnisse eine längere Lebensdauer haben. Im Gegensatz dazu steht ein Unterricht mit Schwergewicht auf der Rezeption des Stoffs, der normierte Anstrengungen abverlangt und bei dem der tatsächliche Stand der Lernenden viel schwerer einzuschätzen ist. Wenn ich heute mit Studierenden und angehenden Mathematiklehrern diskutiere, so stelle ich mit erstaunlicher Regelmässigkeit fest, dass sie einen anregenden und sinnvollen Mathematikunterricht immer gleichsetzen mit dem Behandeln von spannenden Anwendungen der Mathematik in Technik und Alltag, sowie der bis ins Detail ausgeklügelten Wissensvermittlung. Nur selten werden diese beiden Fundamente mit dem Aspekt der singulären Tätigkeiten der Lernenden verknüpft. Es mag einem jungen Mathematiker schon unheimlich vorkommen, wenn man beim Lehren und Lernen von

Mathematik die unberechenbare Seite des Lernenden zum unterrichtsbestimmenden Wegweiser macht. Tut man dies, hat aber der Mathematikunterricht tatsächlich mit dem Leben der Lernenden etwas zu tun, wie es die für die Schule Verantwortlichen, also Ausbilder und Aufsichtspersonen, immer wieder fordern. Nur ist dieser Zusammenhang wohl ein etwas anderer, als ihn sich diese vorgestellt haben. Sie denken nämlich, wie die Studierenden, auch zuerst an diejenigen Aspekte der Mathematik, die man im Alltag und später in der Wissenschaft brauchen kann. Dass damit nur bedingt Sinn erzeugt wird, haben wir oben gesehen. Nein, der Bezug mit dem Leben der Jugendlichen wird dadurch hergestellt, dass sie sich durch ihre Eigentätigkeit selbst besser kennen lernen. Das ist die Stärke, die der Mathematikunterricht ausspielen kann und die vielfach unterschätzt wird. Neuere Forschungsergebnisse belegen gerade auch im Primarschulbereich, dass die Kinder motiviert mit Aufgaben in ihrer mathematisch reinen Form arbeiten, bei denen also bewusst auf einen Bezug zur realen Lebenswelt der Kinder verzichtet worden ist. Wichtig ist nur, dass die Kinder selbst Entscheidungen treffen und auf eigenen Wegen forschen dürfen. Ein erwünschter Nebeneffekt der damit möglichen Konzentration auf den abstrakten Lehrplanstoff ist, dass das Zeitbudget besser eingehalten werden kann und die Maturziele trotz verkürzter Mittelschuldauer und verminderter Wochenstundenzahl eingehalten werden können.

In meinem heutigen Mathematikunterricht kommt es nur noch selten vor, dass ich vorgängig irgend welche Rezepte – sogenannte Algorithmen – erkläre, die dann von den Kindern getreulich ausgeführt werden sollen. Ich habe erfahren, dass Algorithmen – im wahrsten Sinne des Wortes – nicht jugendfrei sind. Sie sollen nicht einem unerfahrenen Gehirn präsentiert werden, weil sie sonst Schädigungen hervorrufen, Schädigungen am Selbstwert des Jugendlichen. Algorithmen sind zwar nützlich und auch unschädlich, wenn sie von mühsamen Tätigkeiten, die man ausführen will, entlasten oder sogar befreien. Deshalb ist das umständliche Hantieren in einem mathematischen Problemfeld notwendige Voraussetzung für das Verstehen von Algorithmen. Ausserdem verhindern die vorgängigen, individuellen Bewegungen der Lernenden den Aufbau eines ungesunden Abhängigkeitsverhältnisses von der Lehrperson. Groteske Züge von Abhängigkeit konnte ich kürzlich bei der 12-jährigen Elisabeth erleben, die bei der Lektüre von Schülertexten zum Zehnerübergang ausser sich geriet, weil drei von vier Schülern unkonventionelle Wege zum Berechnen der Summe von 8 und 9 vorschlugen. Sie lamentierte unter Tränen, dass nur der von ihrer Lehrerin vermittelte Zehnerübergang korrekt sei und dass alles andere verboten werden müsste. So sehr hat Elisabeth ihre Lehrerin in Schutz genommen, dass dabei die Mathematik auf der Strecke bleibt. Denn eine typisch mathematische Fragestellung ist es gerade: „Wie könnte man es denn auch noch anders machen?“

Schliesslich darf die Lehrperson auch an sich selbst denken. Auch ihr stehen Genuss und Befriedigung zu, um den Unterricht als sinnvoll zu erleben. Das reibungslose Funktionieren von perfekten Algorithmen zu überwachen, ist auf die Dauer nicht sehr befriedigend, besonders weil in Tat und Wahrheit immer wieder ärgerliche Defizite zu Tage treten, die korrigiert werden müssen. Viel genussvoller ist es, wenn mathematisch Unerwartetes erfunden und mitgeteilt wird. Aus diesem Grund sollte auch von der Seite der Lehrperson dem Unerwarteten, dem Überraschenden, eben dem Singulären, im Unterricht Raum gegeben werden. So kommt das Prinzip der Befriedigung beiden, Lehrenden und Lernenden, zugute. Ein erfahrener Universitätsdozent meinte einmal ironisch zum Lehrberuf: „Und Spass möchtest du dabei auch noch haben!“ Ja, indem ich ein paar allzu enge Auffassungen zum sinnvollen Mathematikunterricht erweitert habe, indem ich die singulären Produktionen der Lernenden einbeziehe, habe ich Spass beim Unterrichten: Der Unterricht ist für mich sinnvoll geworden.